7.2 KONŠTRUKČNÉ ÚLOHY RIEŠENÉ POMOCOU ZOBRAZENÍ

Videli sme už, že pri riešení konštrukčných úloh sa môžu uplatniť súmernosti, posunutie i otočenie. Teraz sa budeme zaujímať, pre ktoré typy konštrukčných úloh je taký postup možný. Pripomeňme si najprv vlastnosti úsečky XX', ktorá spája v zhodných zobrazeniach vzor a obraz:

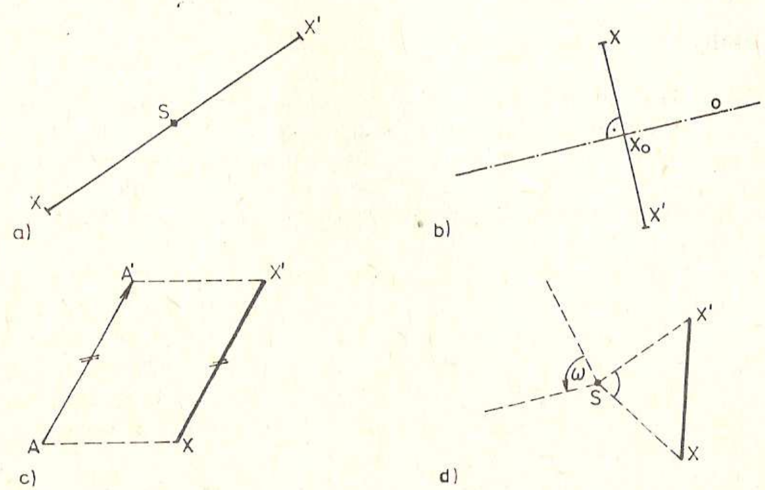
a) **v súmernosti podľa stredu** S delí tento stred úsečku XX' na polovice, teda bod S je stredom úsečky XX' (obr. 7.8a);

b) **v súmernosti podľa osi** o je úsečka XX' kolmá na os o a má na nej svoj stred X_0 (obr. 7.8b);

c) **v posunutí** $T(A \mapsto A')$ je úsečka XX' rovnobežná s úsečkou AA' a má rovnakú veľkosť, $|XX'| = |AA'|$ (obr. 7.8c);

d) **v otočení** $R(S, \omega)$ je úsečka XX' základňou rovnoramenného trojuholníka SXX' s uhlom XSX' s veľkosťou $\omega \neq 180°$ (obr. 7.8d).

Pomocou zobrazení sa riešia predovšetkým konštrukčné úlohy s dvoma neznámymi bodmi X, Y, ktoré sú krajnými bodmi úsečky,

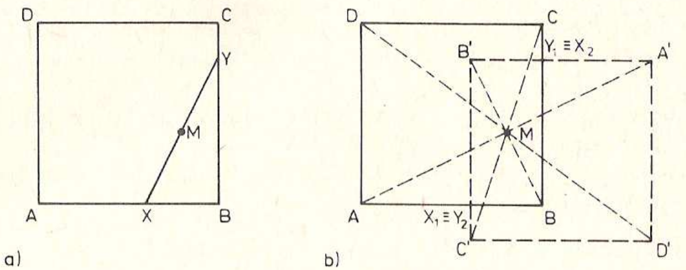


Obr. 7.8

ktorú možno považovať za priečku v útvare alebo za priečku medzi dvoma útvarmi. Ozrejmíme si to na príkladoch.

Príklad 1

Daný je štvorec $ABCD$ a jeho vnútorný bod M. Zostrojte všetky úsečky XY, ktoré majú stred M a ich krajné body X, Y ležia na hranici štvorca.



Obr. 7.9

Riešenie: Obrázok 7.9a ukazuje, že úsečky XY s požadovanými vlastnosťami možno nazvať „priečky v štvorci rozpolované bodom M“. Obidva neznáme body X, Y patria tej istej lomenej čiare $L = ABCDA$. Treba, aby sme získali ďalšiu množinu bodov, ktorej prvkom je jeden z týchto neznámych bodov.

Úsečka XY má vlastnosti úsečky, ktorá spája vzor a obraz v stredovej súmernosti so stredom M a v tejto súmernosti možno zobraziť bod X na bod Y. Pretože nevieme, ktorý bod lomenej čiary $L = ABCDA$ je hľadaným bodom X, zobrazíme v stredovej súmernosti so stredom M všetky jej body, to znamená celú lomenú čiaru L. Potom je bod Y prvkom prieniku lomených čiar L, L'. Našu úvahu môžeme zapísať stručne takto:

Rozbor:

$X \in L$, $Y \in L$, M je stred XY $\Rightarrow$ $Y \in L \cap L'$, pričom $S(M \mapsto M, L \mapsto L')$, v použitej súmernosti X je vzor Y

Konštrukcia:

1. L'; L' je obraz lomenej čiary $L = ABCDA$ v súmernosti so stredom M
2. Y; $Y \in L \cap L'$
3. X; bod M je stredom XY
4. XY

Skúška:

Overíme, či každá zostrojená úsečka XY má požadované vlastnosti, to znamená $X \in L$, $Y \in L$, M je stredom XY. Druhý krok konštrukcie nám zabezpečí, že $Y \in L$. Tretí krok zaručuje, že M je stredom XY. Pretože X je vzorom Y v použitej stredovej súmernosti, platí $X \in L$. Každá zostrojená úsečka XY má všetky tri požadované vlastnosti.

V situácii na obrázku 7.9 má úloha dve riešenia, ktoré vyjadrujú tú istú úsečku s rôzne označenými krajnými bodmi.

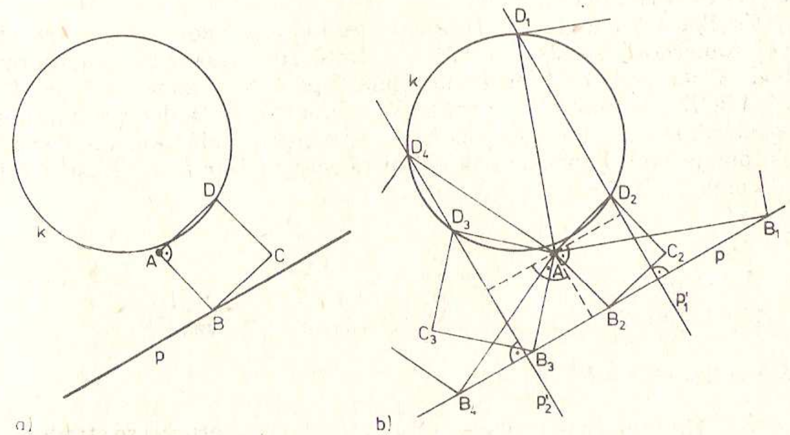
Podrobný zápis konštrukcie a skúšky v príklade 1 môžeme nahradiť stručným záznamom, ak sme v rozbore zaviedli všetky symboly, ktoré použijeme. Skrátený zápis:

Konštrukcia: 1. L'; 2. Y; 3. X; 4. XY

Skúška: (2) $\Rightarrow Y \in L$, $Y \in L'$, (3) M je stred XY, $Y \in L' \Rightarrow X \in L$.

Príklad 2

Daná je priamka p, bod A a kružnica k (obr. 7.10). Zostrojte všetky štvorce $ABCD$, ktoré majú vrchol B na priamke p a vrchol D na kružnici k.



Obr. 7.10

Riešenie: Z obrázka 7.10a vidíme, že neznáme body B, D **určujú** úsečku, ktorá je základňou rovnoramenného pravouhlého **trojuholníka** BDA so základňou BD a pravým uhlom BAD. Úsečka BD **je priečkou** medzi priamkou p a kružnicou k a spĺňa vlastnosti **úsečky** XX' v otočení so stredom A o uhol $90°$.

Pretože v texte úlohy nie je určený zmysel „obiehania **hranice** štvorca", jestvujú dve otočenia so stredom A o $90°$, ktoré môžu zobraziť bod B na bod D.

Rozbor:

$$B \in p,\ D \in k \quad |AB| = |AD| \quad |\sphericalangle BAD| = 90° \Rightarrow \begin{cases} D \in k \cap p', \text{ pričom } R(A \mapsto A,\ p \to p') \text{ je o uhol } 90° \text{ v kladnom alebo v zápornom zmysle} \\ \text{v použitom otočení } R \text{ je } B \text{ vzorom } D \end{cases}$$

Konštrukcia:

1. p_1'; obraz p v otočení $R_1(A, 90°)$ v kladnom zmysle
   p_2'; obraz p v otočení $R_2(A, 90°)$ v zápornom zmysle
2. D; $D \in k \cap (p_1' \cup p_2')$
3. B; B je vzorom D v otočení R_1 (v otočení R_2)
4. $ABCD$; D je štvrtý vrchol rovnobežníka

(V tomto prípade sme dali prednosť obšírnejšiemu zápisu konštrukcie, pretože pracujeme s dvoma otočeniami, zostrojujeme dve priamky p'. Až v zápise konštrukcie sme tieto otočenia R_1, R_2 a priamky p_1', p_2' označili a ich symboly ďalej používali.)

Skúška:

Overíme, či každý zostrojený rovnobežník $ABCD$ má požadované vlastnosti štvorca, to znamená, či $B \in p$, $D \in k$, $|AB| = |AD|$, $|\sphericalangle BAD| = 90°$.
(2): $D \in k$, $D \in p_1' \cup p_2'$; (3): $B \in p$, $|AB| = |AD|$
(1) a (3): $|\sphericalangle BAD| = 90°$; (4): C je vrchol štvorca.

Každý zostrojený rovnobežník $ABCD$ je štvorec s požadovanými vlastnosťami. Úloha má v určení podľa obrázka 7.10b štyri riešenia, ako to naznačujú štyri body D_1, D_2, D_3, D_4 prieniku $k \cap (p_1' \cup p_2')$.

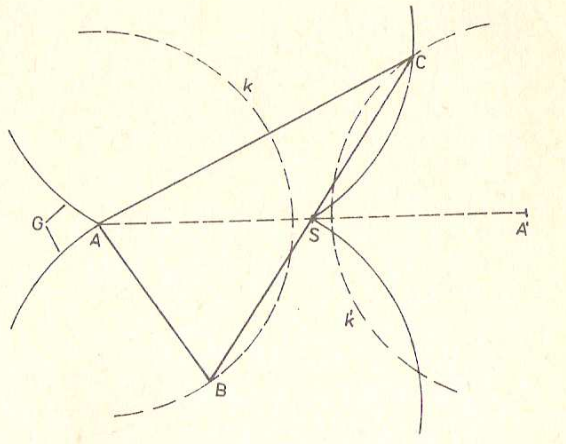
Príklad 1 nám dáva skúsenosť so súmernosťami a priečkou v útvare, príklad 2 s priečkou medzi útvarmi a nevyhnutnosťou uvažovať o dvoch otočeniach (s podobnými situáciami sa stretneme pri posunutí). Riešenie príkladu 2 nám ukazuje aj to, že v texte úlohy sa o priečke

nemusí výslovne hovoriť, použiteľnú priečku musí „objaviť" riešiteľ sám.

V konštrukčných úlohách o trojuholníku, keď je daná jeho ťažnica, býva strana trojuholníka vhodnou priečkou medzi útvarmi, ktoré zostrojíme na základe ďalších údajov.

Príklad 3

Daná je úsečka AS, $|AS| = 6$ cm. Zostrojme všetky trojuholníky ABC, ktoré majú ťažnicu AS, uhol $\gamma = |\sphericalangle ACB| = 30°$, $|AB| = 4$ cm.



Obr. 7.11

Riešenie (obr. 7.11): Neznáme body B, C určujú úsečku (obr. 7.11), ktorá má stred S, pričom bod B patrí kružnici $k(A, 4 \text{ cm})$, kým bod C patrí do množiny $G = \{X \in \varrho;\ |\sphericalangle AXS| = 30°\}$. Na obrázku 7.11 sú tieto útvary znázornené.

Rozbor:

$$t_a = AS \quad \gamma = 30° \quad |AB| = 4 \text{ cm} \Rightarrow \begin{array}{l} B \in k(A, 4 \text{ cm}) \\ C \in G = \{X \in \varrho;\ |\sphericalangle AXS| = 30°\} \\ C \in G \cap k', \text{ pričom } k' \text{ je obraz } k \text{ v súmernosti podľa stredu } S \\ B \text{ je v použitej súmernosti vzor } C \end{array}$$

Konštrukcia:

1. k; $k(A, 4\text{ cm})$
2. G; $G = \{X \in \varrho;\ |\sphericalangle AXS| = 30°\}$
3. k'; obraz k v súmernosti so stredom S
4. C; $C \in G \cap k'$
5. B; vzor C v súmernosti so stredom S
6. $\triangle ABC$

Skúška:

Overíme, či každý trojuholník ABC, ktorý sme zostrojili podľa krokov (1) až (6), má požadované vlastnosti, to znamená, či platí $t_a = AS$, $\gamma = 30°$, $|AB| = 4$ cm.
(4): $C \in G \Rightarrow \gamma = 30°$, $C \in k'$; (5) $C \in k' \Rightarrow B \in k$, $|AB| = 4$ cm
(5): S je stredom BC, $t_a = AS$.
Každý zostrojený trojuholník má všetky požadované vlastnosti. Pre dĺžky udané v texte úlohy však $G \cap k' = \emptyset$, a preto úloha nemá riešenie.

Príklady 1, 2 a 3 sú vzorom na riešenie ďalších konštrukčných úloh pomocou niektorého zo štyroch uvedených zobrazení. Ak nie je v texte výslovne uvedená nijaká priečka, hľadáme ju medzi stranami alebo uhlopriečkami útvarov, ktoré sa majú zostrojiť.

Úlohy

7.8 Daný je polkruh s priemerom $d = 8$ cm a jeho vnútorný bod K. Zostrojte všetky úsečky AB, ktoré majú stred K a krajné body na hranici polkruhu.

7.9 V situácii danej na obrázku 7.9 zostrojte všetky rovnostranné trojuholníky KLM, ktoré majú vrcholy K, L na hranici štvorca.

7.10 V situácii danej na obrázku 7.10 vyznačte stred S kružnice k a zostrojte všetky rovnobežníky $SABC$, ktoré majú vrchol B na priamke p a vrchol C na kružnici k.

7.11 Narysujte konvexný uhol AVB a kružnicu k, ktorá s ním nemá spoločný bod. Zostrojte všetky kosoštvorce $VZYX$, ktoré majú vrcholy X, Y na ramenách uhla a vrchol Z na kružnici k.

7.12 Daná je úsečka AS, $|AS| = 5$ cm. Zostrojte všetky trojuholníky ABC s ťažnicou AS, ak

a) $|AB| = 4$ cm, $|AC| = 7$ cm b) $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$
c) $|AC| = 6$ cm, $t_b = 6$ cm d) $t_b = 9$ cm, $t_c = 6$ cm